

Master-Set d'Exercices : Équations Différentielles

Niveau : 2^{ème} Bac Sc. Physiques & SVT | Focus : Maîtrise Totale

 www.mathaihub.com

Classification

Intuition

Signes

Conditions Initiales

Modélisation

Exercice 1 : Classification & Stratégie

Sans résoudre, identifier pour chaque équation : (1) son ordre, (2) si elle possède un second membre constant (b), et (3) la méthode de résolution appropriée.

- a) $y' + 3y = 0$
- b) $y'' + 4y = 0$
- c) $2y' - 4y = 10$
- d) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Objectif : Savoir identifier le type d'équation avant de choisir sa formule.

Exercice 2 : Précision des Signes (Ordre 1)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 3y' + 6y = 12$$

1. Mettre l'équation sous la forme standard $y' = ay + b$.
2. Donner la solution générale de (E) .
3. Trouver la solution particulière f telle que $f(0) = 5$.

Attention au calcul de $-\frac{b}{a}$! Une erreur de signe ici fausse tout le reste.

Exercice 3 : Calcul des Racines ($\Delta > 0$)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

1. Écrire l'équation caractéristique associée.
2. Déterminer ses racines r_1 et r_2 .
3. En déduire la solution générale $y(x)$.

Exercice 4 : Intuition & Racine Double ($\Delta = 0$)

On considère l'équation : $y'' + 6y' + 9y = 0$.

1. Montrer que le discriminant de l'équation caractéristique est nul.
2. Donner la forme de la solution générale.
3. **Intuition** : Comment se comporte cette solution quand $x \rightarrow +\infty$? Justifier graphiquement.

Exercice 5 : L'Oscillation Harmonique ($\Delta < 0$)

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$.

1. Identifier la pulsation propre ω .
2. Écrire la solution générale sous forme trigonométrique.
3. Déterminer la solution g telle que $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

Exercice 6 : Conditions Initiales & Vigilance

Résoudre le problème de conditions initiales suivant :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

1. Résoudre l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$.
2. Écrire la forme générale de la solution $y(x)$.
3. **Rigueur** : Dériver $y(x)$ puis résoudre le système pour trouver les constantes A et B .

Exercice 7 : Modélisation & Traduction de Problème

La température $\theta(t)$ d'un objet placé dans une pièce à 20°C suit la loi de Newton :

$$\theta'(t) = -k(\theta(t) - 20)$$

On sait qu'à $t = 0$, l'objet est à 80°C .

1. Résoudre cette équation pour exprimer $\theta(t)$ en fonction de k et t .
2. Si après 10 minutes la température est de 50°C , trouver la valeur exacte de k .
3. Quelle sera la température limite de l'objet ? Justifier physiquement.

Exercice 8 : Le Défi Légendaire (Niveau Sciences Math)

On considère l'équation différentielle avec second membre :

$$(E_L) : y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 8x + 2$$

1. Résoudre l'équation homogène associée $(E_H) : y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p de (E_L) sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.
3. En déduire la solution générale de (E_L) .
4. **Le Sacre du Hero** : Trouver l'unique solution f de (E_L) telle que sa courbe représentative passe par l'origine $O(0,0)$ et y admette une tangente horizontale.

*Félicitations ! Si vous avez résolu ces 8 exercices, vous détenez désormais le titre de **Hero of Differential Equations** (SPC & SM).*